Concours AMCPEsession 2014

Composition : Mathématiques 5 (algèbre, analyse)

Durée : 3 Heures

Si un candidat est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre. Les exercices sont indépendants

Exercice 1: Soit α un et un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n(\alpha) = \frac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(\alpha+k)}$$

1) a) Montrer que la suite $(u_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et convergente. Que peut-on déduire pour la série de terme général $u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha)$? On note $\ell(\alpha)$ la limite de la suite $(u_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$.

b) On suppose que $\ell(\alpha)$ est non nulle. Démontrer que : $u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha) \sim \dfrac{\alpha\,\ell(\alpha)}{n}$.

c) Déduire de ce qui précède que $\ell(\alpha) = 0$.

2) Dans cette question : $\alpha \in \left]0;1\right]$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n(\alpha) \geq \dfrac{1}{n+\alpha}$

b) Quelle est la nature de la série de terme général $u_n(\alpha)$?

3) On pose pour tout entier naturel n : $I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\left(1-e^{-t}\right)^n dt$.

a) Etudier la convergence de l'intégrale généralisée $I_n(\alpha)$ et calculer $I_0(\alpha)$.

b) Soit un réel x strictement positif. Intégrer par parties $\int_0^{x} e^{-\alpha t}\left(1-e^{-t}\right)^n dt$, et en déduire une relation simple entre $I_n(\alpha)$ et $I_{n-1}(\alpha+1)$, pour tout n entier naturel non nul.

c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n(\alpha) = u_n(\alpha)$.

4) On suppose désormais que $\alpha > 1$.

a) Montrer que, pour tout N entier naturel : $\sum_{n=0}^{N} I_n(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha-1} - I_{N+1}(\alpha-1)$.

b) En déduire que la série de terme général $u_n(\alpha)$ est convergente, et donner en fonction de α la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\alpha)$.

Exercice 2 : On considère les matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\ \text{ et }\ O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Soit E l'ensemble des matrices $M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM=MA$.

Partie A :

1) a) Vérifier que B appartient à E.

b) Soit n un entier naturel, montrer que A^n appartient à E.

2) Déterminer les réels x, y et z tels que $xI+yA+zB=O$.

3) a) Montrer que E est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix}a&b&c\\b&a+b&b\\c&b&a\end{pmatrix}$ avec a, b et c des réels.

b) En déduire que toute matrice de E est combinaison linéaire de I , A et B; et que E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

c) A l'aide des résultats précédents, montrer que $\mathcal{B}=(I,A,B)$ est une base de E.

Partie B :

1) Calculer les valeurs propres de A . En déduire que A est diagonalisable.

2) Soient $P=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-\sqrt{2}&0&\sqrt{2}\\1&1&1\end{pmatrix}$ et $Q=\begin{pmatrix}1&-\sqrt{2}&1\\-2&0&2\\1&\sqrt{2}&1\end{pmatrix}$.

a) Calculer le produit PQ . En déduire que P est inversible et exprimer son inverse en fonction de Q .

b) Calculer la matrice $D=P^{-1}AP$ et montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ A^n=PD^nP^{-1}$.

3) En déduire les coordonnées de la matrice A^n $(n\in\mathbb{N}^*)$ dans la base $\mathcal{B}$ de E.